

السؤال الأول (42 درجة):

- أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:
- (1) إن المجموعة  $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  تشكل حقلاً بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10.
  - (2) إن الحلقة  $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  هي منطقة تكاملية، لأن الحلقة  $\mathbb{Z}$  منطقة تكاملية.
  - (3) إذا كانت  $A = 6\mathbb{Z}$ ,  $B = 2\mathbb{Z}$  مثاليين في  $\mathbb{Z}$ , فإن  $A \cdot B = A \cap B$ .
  - (4) إذا كانت  $A = 6\mathbb{Z}$ ,  $B = 4\mathbb{Z}$  مثاليين في  $\mathbb{Z}$ , فإن  $A : B = 2\mathbb{Z}$ .
  - (5) إن  $\mathbb{Z}_{12} = 4\mathbb{Z}_{12} \oplus 9\mathbb{Z}_{12}$ .
  - (6) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $\mathbb{Z}_{12}/6\mathbb{Z}_{12}$  يساوي عنصرين فقط.
  - (7) إن العنصر  $(0, 3)$  جامد وليس قاسم للصفر في الحلقة  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ .
  - (8) إن المثالية  $\langle 7 \rangle$  أعظمية في الحلقة  $\mathbb{Z}_{12}$ .
  - (9) إذا كانت  $R = \mathbb{Z}_{30}$  فإن  $J(R) = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle = \langle 6 \rangle$  (أساس جاكبسون).
  - (10) إن  $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$  هي حلقة موضعية.
  - (11) مميز الحلقة  $\mathbb{Z}_4 \oplus 4\mathbb{Z}$  يساوي العدد 4.
  - (12) المثالية الصفرية أولية في أي حلقة.
  - (13) إن حلقة الأعداد العادية  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ساحة مثاليات رئيسية.
  - (14) إن الحدودية  $f(x) = x^2 + 1$  هي حدودية أولية فوق  $\mathbb{Z}_5$ .

السؤال الثاني (42 درجة): علل صحة ما يلي: لتكن  $R$  حلقة.

- (1) إذا كان  $a \in R$   $a \neq 0$  عنصراً جامداً فإن  $a$  ليس عديم القوة.
- (2) كل مثالية في  $R$  نواة لتشاكل حلقي غامر.
- (3) إن كل عنصر من الحلقة  $R$  وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في  $R$ .
- (4) كل مثالية يسارية عديمة  $A$  في الحلقة  $R$  تكون محتواة في أساس جاكبسون  $J(R)$ .
- (5) إذا كانت  $A, B$  مثاليين يساريين في الحلقة  $R$  وكانت  $A$  صغيرة في  $R$  فإن  $A \cap B$  صغيرة في  $R$ .
- (6) إذا كان  $x$  عنصراً من الحلقة  $R$  عديم القوة فإن  $x \in \text{rad } R$  (الأساس الأولي للحلقة  $R$ ).

السؤال الثالث (16 درجة):

عرف الحلقة الاقليدية. ثم أثبت أن أي حلقة اقليدية هي حلقة مثاليات رئيسية



**المسائل الأولى (42 درجة):**

أجب بكتابة صحيح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحققة الخطأ فقط:

- (1)  $\times$  إن الحلقة  $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10 ليست واحدة. ~~جاءت واحدة كما كان ينبغي~~
- (2)  $\checkmark$  إن الحلقة  $(Z_{119}, +, \cdot)$  هي حقل. ~~لا، ليس حقل~~
- (3) إن عدد مثاليات حلقة الأعداد الحقيقية  $(R, +, \cdot)$  غير منته. ~~عدد مثاليات  $R$  حقل~~
- (4) إذا كانت  $A = 6Z, B = 4Z$ ، فإن  $A \cdot B = A \cap B$ . ~~خطأ  $A \cap B = 12Z$  و  $A \cdot B = 24Z$~~
- (5) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في الحلقة  $Z_{57}$ . ~~خطأ لأن  $57$  ليس منته~~
- (6) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $3Z/15Z$  يساوي 3 عناصر. ~~خطأ 6~~
- (7)  $\checkmark$  إن العنصر  $(1, 3)$  جامد وقاسم للصفر في الحلقة  $Z_3 \oplus Z_6$ .
- (8) إن المثالية  $\langle 4 \rangle$  أعظمية في الحلقة  $Z_{24}$ . ~~خطأ لأن  $\langle 4 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle$  في  $Z_{24}$~~
- (9) إن المثالية  $\langle 4 \rangle$  أولية في الحلقة  $Z_8$ . ~~خطأ لأن  $\langle 4 \rangle = \{0, 4\}$  و  $2 \cdot 2 = 4$  بينما  $2 \notin \langle 4 \rangle$~~
- (10)  $\checkmark$  إن  $(Z_6, +, \cdot)$  هي حلقة موسمية.
- (11)  $\checkmark$  مميز الحلقة  $(5Z, +, \cdot)$  يساوي العدد الأولي 5. ~~يساوي الصفر~~
- (12) حلقة الخارج  $Z/3Z$  هي حلقة مثاليات رئيسية.  $\checkmark$

- (13) إن الحدودية  $x^2 + 3x + 2 \in Z_6[x]$  تملك صفرين (جذرين) على الأكثر في  $Z_6$ . ~~علقت 1 - خطأ~~
- (14) حلقة كثيرات الحدود على أي حقل هي حلقة اقليدية.  $\checkmark$

**المسائل الثاني (32 درجة):** حل صحة ما يلي:

- (1) إذا كانت  $A, B$  مثاليين في الحلقة  $R$ ، تحققان  $A \cap B = 0$ ، فبانه أيا كان  $a \in A, b \in B$  فإن  $a \cdot b = 0$ . ~~خطأ  $A \cdot B \subseteq A \cap B = 0$  و  $a \cdot b = 0$  إذا  $a \in A, b \in B$~~
- (2) إن كل عنصر من الحلقة  $R$  وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في  $R$ .
- (3)  $\checkmark$  إن أي مثالية يسارية عديمة القوى في الحلقة  $R$  تكون عديمة.
- (4) كل مثالية يسارية عديمة  $A$  تكون محتواة في أساس جاكسون  $J(R)$ .
- (5)  $\checkmark$  إن أساس جاكسون  $J(R)$  موجود في الحلقة  $R$  ولا يساوي الحلقة  $R$  وهو أكبر مثالية يسارية صغيرة في  $R$ .

**المسائل الثالث (26 درجة):** لتكن  $R$  حلقة تبديلية و  $A$  مثالية في  $R$ .

عرف جذر (أساس) المثالية  $A$   $(\text{rad } A)$ ، ثم أثبت ما يلي:

- (1)  $\text{rad } A$  مثالية في  $R$ .
- (2) إذا كانت  $A$  مثالية أولية في  $R$ ، فإن  $\text{rad } A = A$ .
- (3) من أجل أي حلقة واحدة  $R$  يكون  $\text{rad } R \subseteq J(R)$  حيث  $J(R)$  هو أساس جاكسون في  $R$ .

المسائل الأولى (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1) ✓ إن حلقة الأعداد العادية  $(Q, +, \cdot)$  هي منطقة تكاملية.
- (2) ✓ إن الحلقة  $(Z_{119}, +, \cdot)$  هي حل.  $7 \times 17 = 119$  أو ليس عدداً أولياً.
- (3) قانون الاختصار محقق بأي حلقة ايزومورفية مع (تمثل) منطقة تكاملية.
- (4) إن الحلقة  $(nZ, +, \cdot)$  حيث  $n \in Z$  هي منطقة تكاملية جزئية من  $(Z, +, \cdot)$ .
- (5) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $3Z/15Z$  يساوي 3 عناصر. 5

(6) ✗ إن حلقة الخارج  $Z/6Z$  هي حل.

- (7) ✓ إن حلقة الأعداد الحقيقية  $(R, +, \cdot)$  ساحة مثاليات رئيسية.
- (8) ✗ إن الساتب  $Z_{12}$  أمثلية في حلقة  $Z_{12}$ .
- (9) ✗ إن  $(Z_6, +, \cdot)$  هي حلقة موضعية.
- (10) ✗ إن 3 عنصر ليس عديم القوى في  $Z_{27}$ .
- (11) مميز الحلقة  $(nZ, +, \cdot)$  حيث  $n \in Z^+$  يساوي العدد  $n$ .
- (12) إن المثالية  $2Z \cap 5Z$  هي مثالية أولية في الحلقة  $Z$ .
- (13) إن العنصر 4 جامد في الحلقة  $(Z_{11}, +, \cdot)$ .
- (14) إن الحدودية  $x^2 + 3 \in Z_7[x]$  تملك صفرين (جذرين) على الأكثر في  $Z_7$ .

المسائل الثاني (22 درجة): لنكن  $R, S$  حلقتين واحديتين، وليكن  $f: R \rightarrow S$  هومومورفيزمًا حلقيًا. أثبت ما يلي:

- (1) إذا كانت  $A$  مثالية يسارية في  $R$ ، وكان  $f$  غامراً فإن  $f(A)$  مثالية يسارية في  $S$ .
- (2) إذا كان  $f$  غامراً فإن  $f(1_R) = (1_S)$ .
- (3) إذا كانت  $A, B$  مثاليتين في  $R$  بحيث  $B \subseteq A$ ، فإن  $\frac{R/B}{A/B} \cong R/A$ .

المسائل الثالث (36 درجة): علل صحة ما يلي:

- (1) إذا كانت  $M, N$  مثاليتين في الحلقة  $R$  (التبديلية والواحدية)، تحققان  $M + N = R$ ، فإن  $M \cdot N = M \cap N$ .
- (2) إن كل عنصر من الحلقة  $R$  وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في  $R$ .
- (3) إذا كانت  $A$  مثالية يمينية أصغرية في الحلقة الواحدية  $R$ ، فإن  $A = aR$  حيث  $a \in A, a \neq 0$ .
- (4) إن أي مثالية يسارية عديمة القوى في الحلقة  $R$  لا تحتوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.
- (5) إذا كانت  $A$  مثالية يسارية صغيرة في الحلقة  $R$ ، فإن  $A \subseteq J(R)$  حيث  $J(R)$  هو أساس جاكبسون في  $R$ .





المدة: ساعتان  
العلامة: 100 درجة  
الاسم:                     

امتحانات الدورة الثانية للعلم الدراسي 2013 - 2014  
مسئلة مقرر البنى الجبرية (2)  
سنة ثانية رياضيات

جامعة البعث  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

### السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1) كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة  $Z_{10}$  يكون قابلاً للقلب أو قاسماً للصفر.
- (2) إن الحلقة  $(Z_{57}, +, \cdot)$  هي منطقة تكاملية.
- (3) إذا كانت  $A = 6Z$ ,  $B = 8Z$  فإن  $A \cdot B = A \cap B$ .
- (4) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $3Z/12Z$  يساوي 3 عناصر.
- (5) إن حلقة الخارج  $2Z/6Z$  ليست حقلاً لأن  $2Z$  ليست واحدة.
- (6)  $Z \cong nZ$ ;  $\forall n > 1$
- (7) إن المثالية  $\langle 3 \rangle$  أعظمية في الحلقة  $Z_{36}$ .
- (8) كل حلقة اقليدية هي حلقة مثاليات رئيسية.
- (9) مميز الحلقة  $(5Z, +, \cdot)$  يساوي العدد الأولي 5.
- (10) إن المثالية  $12Z$  أولية في  $Z$ .
- (11) إن العنصر 4 جامد في الحلقة  $(Z_{10}, +, \cdot)$ .
- (12) إن الحدودية  $x^2 + 3x + 2 \in Z_6[x]$  تملك صفرين (جذرين) على الأكثر في  $Z_6$ .

### السؤال الثاني (30 درجة):

علل صحة ما يلي:

- (1) كل حل  $F$  هو منطقة تكاملية.
- (2) إذا كانت  $R$  منطقة تكاملية فإن العناصر الحاملة في  $R$  هي فقط 0 و 1.
- (3) إن كل عنصر من الحلقة  $R$  وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في  $R$ .
- (4) إذا كانت  $A$  مثالية يسارية أصغرية في الحلقة  $R$ ، فإن  $A = Ra$  حيث  $a \in A$  و  $a \neq 0$ .
- (5) إن أساس جاكيمسون  $J(R)$  في الحلقة  $R$  هو مثالية يسارية صغيرة في الحلقة  $R$ .

### السؤال الثالث (24 درجة):

اثبت ما يلي:

- (1) إذا كان العنصر  $x \in R$  عديم القوى في الحلقة  $R$ ، فإن  $x \in \text{rad } R$  حيث  $\text{rad } R$  هو الأساس الأولي للحلقة  $R$ .
- (2) إذا كانت  $A$  مثالية في  $R$  فإن  $\text{rad}(\text{rad } A) = \text{rad } A$  حيث  $\text{rad } A$  هو جنر (أساس)  $A$ .
- (3) من أجل أي حلقة واحدة  $R$  يكون  $\text{rad } R \subseteq J(R)$  حيث  $J(R)$  هو أساس جاكيمسون في  $R$ .

### السؤال الرابع (10 درجات):

اثبت أن:

حلقة الحدوديات  $F[x]$  فوق أي حل  $F$  هي حلقة مثاليات رئيسية.

أجب عن الأمثلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):  
أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1) إن  $17Z \cup 51Z$  مثالية في الحلقة  $Z$  وتساوي  $Z$ .
- (2) إن حلقة الخارج  $2Z/6Z$  هي حقل.
- (3) إن  $(Z_{20}, +, \cdot)$  هي حلقة تامة.
- (4) إن حلقة الخارج  $3Z/12Z$  حلقة ليست واحدية لأن  $3Z$  حلقة ليست واحدية.
- (5) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $2Z/8Z$  يساوي 8 عناصر.
- (6) كل حلقة تبديلية وواحدية تحقق خاصية الاختصار.
- (7) كل عنصر مغاير للصفر في حلقة تبديلية وواحدية يكون إما قاسم للصفر أو قابل للقلب.
- (8) إن المثالية الصفرية في حلقة الأعداد العادية  $Q$  أولية.
- (9) مميز الحلقة  $(5Z, +, \cdot)$  يساوي 5.
- (10) إن  $2Z \cap 5Z$  مثالية أعظمية في  $Z$ .
- (11) إن العنصر 4 جامد في الحلقة  $(Z_{10}, +, \cdot)$ .
- (12) إن حلقة الأعداد الصحيحة  $(Z, +, \cdot)$  حلقة أرثينية ونيوثرية بأن واحد.

السؤال الثاني (40 درجة): علل صحة ما يلي:

- (1) إذا انتمى عنصر قابل للقلب من اليسار لمثالية يسارية  $A$  من حلقة واحدية  $R$ ، فإن  $R = A$ .
- (2) إذا كانت  $M, N$  مثليتين في الحلقة  $R$  (التبديلية والواحدية)، تحققان  $M + N = R$ ، فإن  $M \cdot N = M \cap N$ .
- (3) إذا كان  $Z_n$  (حقل،  $n > 1$ )، فإن  $n$  يكون أولياً.
- (4) كل مثالية عديمة القوى في حلقة  $R$ ، تكون عديمة.
- (5) إذا كانت الحلقة  $R$  واحدية وتبديلية، و  $A$  مثالية أولية في  $R$ ، فإن  $\text{rad } A = A$ .
- (6) حلقة الأعداد الصحيحة  $Z$  هي حلقة اقليدية.

السؤال الثالث (24 درجة): لتكن  $R, S$  حلقتين واحديتين، وليكن  $f: R \rightarrow S$  هومومورفيزماً حلقياً. أثبت ما يلي:

- (1)  $\ker f$  (نواة  $f$ ) مثالية في  $R$ .
- (2) إذا كان  $f$  غامراً فإن  $f(1_R) = (1_S)$ .
- (3)  $R/\ker f \cong \text{Im } f$ .



①

✓

اسم الطالب  
أجوبة حقرر المبتجدة 1/2  
سنة ثانية رياضيات

امتحان الفصل الأول للعام الدراسي 2013 - 2014

الجواب الأول كل درجة لكي طلبت درجات

(1) خطأ لأن اجتماعهم يساوي  $17\mathbb{Z}$

(2) صح

(3) خطأ لأن  $5\mathbb{Z} \neq 4\mathbb{Z}$  و  $20\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$

(4) خطأ، حلقه واحدية والحيادي في  $9 + 12\mathbb{Z}$

(5) خطأ، يساوي 4 عناصر

(6) خطأ يجب أن تكون عامه

(7) خطأ يجب أن تكون منتهية

(8) صح

(9) خطأ، يساوي صفر لأن  $12\mathbb{Z}$  منتهية

(10) خطأ، لأن  $5\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = 10\mathbb{Z}$  متساوية في  $2\mathbb{Z}$  وفي  $5\mathbb{Z}$

(11) خطأ، لأن  $4 \neq 6 \neq 4$

(12) خطأ،  $\mathbb{Z}$  حلقه بنوثرية وليست أربينية

الجواب الثاني 40 درجة (لكل من اوج (6) درجة وكل من اوج (7) درجة)

(11) ليكن  $a \in A$  حيث  $a$  مضربا للوحدات اليسار عند  $a \in R$  حيث

(6)  $ba = 1$  ومنه  $1 = ba \in A$  وهذا يؤدي الى ان  $R = A$





(2) ان  $MN \subseteq M \cap N$  وذلك لان اذا كان

$$x \in MN \text{ عنده } x = \sum a_i b_i \text{ حيث } a_i \in M, b_i \in N \quad (7)$$

وهذا المجموع منه. ومنه  $x \in M$  و  $x \in N$  وبالتالي  $x \in M \cap N$

الاحتواء العكسي.  $1 \in R$  و  $R = M \cap N$  ومنه يوجد  $a \in M$  و  $b \in N$

$$\text{حيث } 1 = a + b. \text{ ليكن } x \in M \cap N \text{ عنده } x = x(a+b) = xa + xb = xa + bx \in M \cap N$$

ومنه  $M \cap N \subseteq M \cap N$  ثم ان  $M \cap N = M \cap N$

(3) ان  $Z_n$  ابرو مودوليوس  $\mathbb{Z}_n$  وبالتالي  $n \mathbb{Z}$  مثالية اولية (6)

في  $Z$  ومنه في اوليه في  $Z$  وهذا يقص ان  $n$  اولي

(4)  $B$  ديسم القوي في  $R$  عنده يوجد  $n \in N^* \text{ بحيث } B^n = 0$  (7)

من مبره اضرب، ليكن  $b \in B$  عنده  $b^n = 0$   $b^n = b b \dots b \in B^n = 0$

وهذا يبين ان كل عنصر من  $B$  هو ديسم القوي ومن ثم فان  $B$  مثالية كبرى

(5) ان  $\text{Rad } A \supseteq A$  ليكن  $x \in \text{rad } A$  عنده يوجد  $n \in N^* \text{ بحيث } x^n \in A$  (7)

وبما ان  $A$  مثالية اوليه في  $R$  فان  $x \in A$  ومنه

$$\text{Rad } A \subseteq A \text{ ومن ثم فان } \text{Rad } A = A$$

(6)  $Z$  هي حقله تكاملية. لتعرف  $N \rightarrow Z^*$   $\varphi$  على النحو التالي  $\varphi(m) = |m|$  (7)

بجد  $\varphi$  تطبيق وحيد  $\varphi(a+b) = |a+b| \geq |a| + |b| \geq \varphi(a) + \varphi(b)$  ليكن  $a, b \in Z$  وبما  $a \neq 0$

وحسب خواصية التمر. يوجد  $q, r \in Z$  حيث  $a = bq + r$  حيث  $|r| < |a|$







أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1) إن  $2Z \cup 8Z$  مثالية في الحلقة  $Z$  وتساوي  $8Z$ .
- (2) إن جميع عناصر الحلقة  $Z_4$  المغايرة للصفر عناصر قابلة للقلب فيها.
- (3) إن حلقة الخارج  $2Z/6Z$  هي ليست ساحة صحيحة (منطقة تكاملية).
- (4) إن  $(Z_8, +, \cdot)$  حلقة موضعية وليست حقلاً.
- (5) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $7Z/21Z$  يساوي 7 عناصر.
- (6) إن مميز الحلقة  $(5Z, +, \cdot)$  يساوي العدد الأولي 5.
- (7) إن العنصر 2 في الحلقة  $(Z_8, +, \cdot)$  جامد وليس عديم القوى.
- (8) إن الحلقة  $Z_5$  إيزومورفية مع حلقة الخارج  $Z/5Z$ .
- (9) المثالية الصفرية أولية في الحلقة  $(Z_{12}, +, \cdot)$ .
- (10) إن  $2Z \cap 3Z$  مثالية أعظمية في  $Z$ .
- (11) إن حلقة الأعداد العالدية  $Q$  هي ساحة مثاليات رئيسية.
- (12) إن حلقة الأعداد الحقيقية  $R$  هي حلقة نيوترية وليست أرتينية.

السؤال الثاني (32 درجة): عطل صحة ما يلي:

- (1) كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً.
- (2) إذا كانت الحلقة  $R$  تحقق خاصية الاختصار، فإن  $R$  حلقة تامة.
- (3) إذا كانت الحلقة  $R$  واحدية وتبديلية، و  $A$  مثالية أولية في  $R$ ، فإن  $\text{rad } A = A$ .
- (4) حلقة الأعداد الصحيحة  $Z$  هي حلقة اقليدية.

السؤال الثالث (32 درجة):

أثبت ما يلي:

- (1) لتكن  $R$  حلقة واحدية، عندئذ إذا كانت  $A \neq R$  مثالية يسارية من  $R$ ، فإنه توجد في  $R$  مثالية يسارية أعظمية تحوي  $A$ .
- (2) إذا كانت  $A, B$  مثاليتين يساريتين في الحلقة  $R$  بحيث إن  $A \subseteq B$  وإذا كانت  $B$  صغيرة في  $R$  فإن المثالية  $A$  تكون صغيرة في  $R$ .
- (3) لتكن المثالية اليسارية  $A$  من الحلقة  $R$  عديمة القوى في  $R$ ، عندئذ يوجد  $n \in \mathbb{N}^*$  يحقق  $A^n = 0$ .











4E

(3)

في الجواب الثالث  
2-  $A, B$  مثاليين لـ  $R$  حيث  $A \subseteq B$  ~~فإن~~  $B$  مثالي

لـ  $R$  صنفه  $R$ . ولكن  $K$  مثالي لـ  $R$  حيث  $A + K = R$   
عندئذ  $R = A + K \subseteq B + K \subseteq R$  ومنه يكون  $B + K = R$  ومنه الفرض ينتج  
أن  $K = R$  إذا  $A \neq R$  صنفه  $R$ .

3- لنفرض أن المثالي  $A$  لـ  $R$  محدود القوة عند  $n \in \mathbb{N}^*$  حيث  
 $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  وأيضا  $a_1 a_2 \dots a_n = 0$  (10)  
ليكن  $x \in A^n$  عنده  $x = \sum_{i=1}^n b_i a_i$  حيث  $b_i \in A$  لكل  $1 \leq i \leq n$  ومنه  
 $A^n = 0$ .

د. أيمن الخوص

أ. س.

تاريخ اليمين

2013 / 7 / 1



أجب عن الأسئلة الآتية:

المسألة الأولى (36 درجة):

أجب بكلمة صبح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصريب لحالة الخطأ فقط:

- (1) إن عدد مثاليات الحلقة  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  سبع مثاليات .
- (2) إن حلقة الخارج  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  حلقة ليست واحدية .
- (3) إن  $2\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$  في الحلقة  $\mathbb{Z}$  .
- (4) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  يساوي 6 عناصر .
- (5) المثالية  $A = \{0, 4\}$  أولية في الحلقة  $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$  .
- (6) إن المثالية  $4\mathbb{Z}$  أعظمية في الحلقة  $2\mathbb{Z}$  .
- (8) إن أي عنصر مغاير للصفر في الحلقة المنتهية يكون عكوساً أو قابساً للصفر .
- (9) مميز الحلقة  $(11\mathbb{Z}, +, \cdot)$  يساوي 11 .
- (10) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في أي حلقة .
- (11) كثيرة الحدود  $x^4 + 3x^2 + 3 \in \mathbb{Z}[x]$  أولية (غير قابلة للتحليل) في الحلقة  $\mathbb{Z}[x]$  .
- (12) إن حلقة الأعداد العادية  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  حلقة أرتينية ونيوثرية بأن واحد .

المسألة الثاني (40 درجة): عالج صحة ما يلي:

- (1) لتكن  $R$  حلقة تبديلية و واحدية، ولتكن  $A, B$  مثليتين في الحلقة  $R$  لتحققان  $A + B = R$ ،  
عندئذ  $A \cdot B = A \cap B$  .
- (2) كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً .
- (3) إذا كن  $F$  حقلاً فلن  $F$  بحوي مثليتين فقط هما  $\{0\}$  و  $F$  .
- (4) إذا وجد في المثالية  $A$  من الحلقة  $R$  عنصر قابل للقلب من اليسار، فإن  $R = A$  .
- (5) إذا كانت الحلقة  $R$  تبديلية وواحدية فإن كل مثالية أعظمية في الحلقة  $R$ ، هي مثالية أولية .

المسألة الثالث (24 درجة): أثبت ما يلي:

- (1) لتكن  $R$  حلقة تبديلية و واحدية، ولتكن  $A \neq R$  مثالية في  $R$ ، عندئذ يوجد في  $R$  مثالية  
أعظمية تحوي  $A$  .
- (2) أثبت أن كل حلقة اقليدية  $R$  هي حلقة مثاليات رئيسية .

اسم بصيغ مذكر الجديده / 2  
سنة ثانية رياضيات / تاريخ الامتحان 85/6/2012

الجواب السؤال: لكل بند ثلاث درجات 63 درجة

- (1) خطأ، متباينة لأن  $Z_2$  عقل.
- (2) خطأ،  $\frac{2Z}{6Z}$  واحد في مخطط  $4+6Z$  هو المعنى الجيادي.
- (3) خطأ،  $2Z+5Z=Z$  لأن 2, 3 أوليان متباينين.
- (4) خطأ، عدد عناصر حلقة الخوا 9  $\frac{2Z}{6Z}$  باره 3.
- (5) خطأ، إن  $A$  ليس أوليه لأن  $2 \cdot 2 = 4$  و  $2 \notin A$ .
- (6) صغ، (7) عدد محدود و يقطر علامة لصالح الطالب.
- (8) صغ.
- (9) خطأ، مبدأ الحلقة  $Z$  ليس من الصفات التي لا يغير من حيث.
- (10) خطأ، قانون القسمة ينطبق في العلاقات الثامه. (المطابق التكافلية).
- (11) صغ.
- (12) صغ.

الجواب الثاني، (40 درجة) 8 درجات لكل بند

(1)  $A \cdot B = \{ \langle x_i, y_i \rangle : x_i \in A, y_i \in B \}$  بيان  $A, B$  متباينين  $AB \subseteq A, B$

ومن  $AB \subseteq A \cap B$ ، الاستدلال المنطقي. بيان  $R = A \cap B$  وان  $1 \in R$  عندئذ يبرهن

$a \in A$  و  $b \in B$  حيث  $1 = a + b$ . ليكن  $x \in A \cap B$  عنده  $x = ax + bx = ax + bx$

لأن  $R$  تبديلية. بيان  $a \in A, x \in B$  عنده  $ax \in AB$  كما أن  $x \in AB \iff x \in A \cap B$  و  $x \in AB$  و  $x \in A \cap B$

(2)  $A \cap B \subseteq AB$  كبرهان  $R$  منطقة تكافلية مستقيمة.   
 (2) كبرهان متباين للصفر  $R$  متباين للتكافلية. ليكن  $a \in R, 0 \neq a$  إذا كان  $a$  متبايناً



[illegible]

(2) إذا وجد مثاليه متشاكلين  $A \cong B$  في الحقل  $A$  فإنه يوجد  $0 \neq x \in A$  ومنه  $\alpha \in \text{Def}$  و

تفصيلات في كتابي ومكة ف

(4) لستون ان ۸ نوبت وند و قابل تحلیلی است. قیاسه لیکن  $a$ ، فضا تیریه  $R$ ،  $\Delta$  لیست

$a \in A$  و  $b \in A$  بر این که  $ba = 1$  در بیان عنصر واحد به سببی از  $A$  میان  $R=A$ .

(5) سیدان  $R$  سے بلکہ  $R$  پر  $A$  اور  $R$  پر  $R$  کا  $\frac{R}{A}$  حلقہ

$\frac{R}{A}$  نقطة تقاطع د هـ ا و ب الى ا بـ A ا ل ي كـ

المواد الثالث ، 24 درجة

(1) ليكن A مثالي في R، ولتأخذ المبرمج [مثلاً]  $R$  و  $A = B$  مثليين في  $T$  فلهذا  $A \neq B$

لبن  $ACT$ ، كما أن  $T$  مربيته جرياً ومنه علاقة الامتزاز. فبذلك  $A$  مجموعته جريته من

والمقدار  $K = \frac{UB}{R_{eq}}$  مثالیه بدین  $R$  و این

$A \subseteq K$  بالامتانة لذلك بان  $K \neq R$  لانه اذ امان  $K=R$  بان  $A \subseteq K = \frac{UB}{\sim}$

و مناسبتی که  $D \in T_0$  و به  $D = R$  ( $= 1 \in D$ ) و رضا پناهنه کن  $D \in T, ST$

لذا آتایم که این  $K \in T$  و  $\lambda \in K$  به طوری که  $\lambda \neq 0$  است.

$N \subseteq U^B = K$  مع تعريف الحد الأدنى المبررة  $T_0$  في  $T$  وحيد لقيمة  $\alpha$  في  $\alpha$  في  $\alpha$

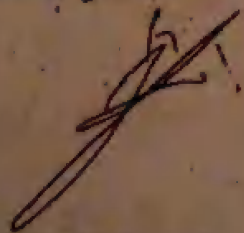
T عمداً اولى بـ M، اذ M مالية اقرب من A و A م

(٢) انكمن في حلقته امكانه . غنائم عليه الترميم فاما في حلقته - حاليه - فانك من اثار

٢٥

لنفرض أن  $A \neq \{0\}$  فإنه يوجد  $a \in A$  بحيث  $a \neq 0$ ، بيان الحلقة  $R$   
 انحصارية بأنه يوجد تطبيق  $\varphi: R^* \rightarrow N$  يحقق الشروط الواردة في تعريف الحلقة الإبدالية  
 لتأخذ المجموعة  $T = \{\varphi(c) : c \in A, c \neq 0\}$  فنجد أن  $T$  مجموعة جزئية من  $N$  وغير خالية  
 لأن  $\varphi(a) \in T$  وبما أن أي مجموعة جزئية وغير خالية من  $N$  تحتوي على عنصر طائفي  
 في  $T$  عنصر أصغر ولكن  $\varphi(b)$  حيث  $b \in A$  وأن  $b \neq 0$ ، ومنه بيان  $Rb$  مثالاً لـ  $R$   
 وأن  $Rb \subseteq A$ ، ليكن  $x \in A$  عندها لتجد العنصرين  $x, b$  يوجد  $r, q \in R$  بحيث  
 $x = bq$ ، وأن  $r = 0$ ، أو  $\varphi(r) < \varphi(b)$ ، لنفرض أن  $r \neq 0$  عندها فإن  
 $r = x - bq \in A$  وأن  $\varphi(r) < \varphi(b)$  وهذا يناقض كون  $\varphi(b)$  عنصراً أصغر في  $T$ .  
 ومنه نجد أن  $r = 0$  وبالتالي  $x = bq \in Rb$  وهذا يبين لنا أن  $A \subseteq Rb$   
 ومنه  $A = Rb$ ، إذاً  $R$  حلقة مثالاً، نسيب.

د. أيمن الحويج



2012/6/25



أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بعلامة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1) إن  $8Z \cup 2Z$  مثالية في الحلقة  $Z$  وتساوي  $8Z$ . خطأ
- (2) إن جميع عناصر الحلقة  $Z_6$  المعاكسة للصفر عناصر قابلة للقلب فيها. خطأ
- (3) إن حلقة الخارج  $2Z/6Z$  هي ليست ساحة صحيحة (منطقة تكاملية). صحيح
- (4) إن  $(Z_8, +, \cdot)$  حلقة موضعية وليست حقلاً. خطأ
- (5) إن عدد عناصر حلقة الخارج  $7Z/21Z$  يساوي 7 عناصر. خطأ
- (6) إن مميز الحلقة  $(5Z, +, \cdot)$  يساوي العدد الأولي 5. خطأ
- (7) إن العنصر 2 في الحلقة  $(Z_8, +, \cdot)$  جامد وليس عديم القوى. خطأ
- (8) إن الحلقة  $Z_5$  إيزومورفية مع حلقة الخارج  $Z/5Z$ . صحيح
- (9) المثالية الصفرية أولية في الحلقة  $(Z_{12}, +, \cdot)$ . خطأ
- (10) إن  $2Z \cap 3Z$  مثالية أعظمية في  $Z$ . خطأ
- (11) إن حلقة الأعداد العادية  $Q$  هي ساحة مثاليات رئيسية. صحيح
- (12) إن حلقة الأعداد الحقيقية  $R$  هي حلقة نيوترية. وليست أرتينية. خطأ

السؤال الثاني (32 درجة): عطل صحة ما يلي:

- (1) كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً. خطأ
- (2) إذا كانت الحلقة  $R$  تحقق خاصية الاختصار، فإن  $R$  حلقة تامة. خطأ
- (3) إذا كانت الحلقة  $R$  واحدة وتبديلية، و  $A$  مثالية أولية في  $R$ ، فإن  $\text{rad } A = A$ . خطأ
- (4) حلقة الأعداد الصحيحة  $Z$  هي حلقة أقليدية. خطأ

السؤال الثالث (32 درجة):

أثبت ما يلي:

- (1) تكون  $R$  حلقة واحدة، عندئذ إذا كانت  $A \neq R$  مثالية يسارية من  $R$ ، فإنه توجد في  $R$  مثالية يسارية أعظمية تحوي  $A$ . صحيح
- (2) إذا كانت  $A, B$  مثاليين يساريين في الحلقة  $R$  بحيث  $A \subseteq B$  وإذا كانت  $B$  صغيرة في  $R$  فإن المثالية  $A$  تكون صغيرة في  $R$ . صحيح
- (3) تكون المثالية اليسارية  $A$  من الحلقة  $R$  عديمة القوى في  $R$ ، عندئذ يوجد  $n \in \mathbb{N}^*$  يحقق  $A^n = 0$ . صحيح



أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1)  $(Z_3, +, \cdot)$  حقل وليس حلقة موضعية.
- (2) إن حلقة الخارج  $2Z/6Z$  حلقة واحدة.
- (3) إن  $12 \cdot 16 = 0$  في الحلقة  $(Z_{25}, +, \cdot)$  .  $-17$
- (4) إن حلقة الخارج  $Z/6Z$  هي حلقة تامة. خطأ  $2Z/6Z$  هي حلقة واحدة.
- (5) المثالية الصفرية في الحلقة  $(Z_{18}, +, \cdot)$  هي مثالية أولية.
- (6) إن المثالية  $4Z$  أعظمية في الحلقة  $2Z$  وبالتالي فهي أولية فيها. خطأ  $4Z \subseteq 2Z$  و  $2Z \not\subseteq 4Z$
- (7)  $\{0, 6\}$  مثالية أعظمية في الحلقة  $(Z_{12}, +, \cdot)$ . خطأ  $\langle 6 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle$
- (8) إن أي عنصر مغاير للصفر في الحلقة المنتهية يكون عكوساً أو قاسماً للصفر.
- (9) مميز الحلقة  $(11Z, +, \cdot)$  يساوي 11.
- (10) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في أي حلقة.
- (11) كثيرة الحدود  $x^4 + 3x^2 + 3 \in Z[x]$  أولية (غير قابلة للتحليل) في الحلقة  $Z[x]$ .
- (12) إن حلقة الأعداد العادية  $(Q, +, \cdot)$  حلقة أرثينية وليست نيوترية.

السؤال الثاني (40 درجة): علل صحة ما يلي:

- (1) لتكن  $R$  حلقة تبديلية وواحدية، ولتكن  $A, B$  مثاليين في الحلقة  $R$  تحققان  $A + B = R$ ، عندئذ  $A \cdot B = A \cap B$ .
- (2) كل ساحة صحيحة منتهية تشكل حقلاً.
- (3) لتكن  $R$  هي حلقة بول (أي  $a^2 = a$  لكل  $a \in R$ )، عندئذ تكون  $R$  تبديلية.
- (4) إن جذر جاكبسون  $J(R)$  في الحلقة التبديلية والواحدية  $R$  هو مثالية صغيرة في  $R$ .
- (5) كل مثالية أعظمية في الحلقة  $R$ ، هي مثالية أولية. ( $R$  حلقة تبديلية وواحدية)

السؤال الثالث (24 درجة):

- (1) أثبت أن كل حلقة اقليدية  $R$  هي حلقة مثاليات رئيسية.
- (2) إذا كانت  $R$  حلقة تبديلية و  $x \in R$ ، فأثبت أنه إذا كان  $x \in \text{rad } R$  حيث  $\text{rad } R$  هو الجذر الأولي للحلقة  $R$ ، فإن  $x$  يكون عديم القوى.



أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

- (1) - إن حلقة الخارج  $2Z/4Z$  ساحة صحيحة.
- (2) - إن عدد مثاليات الحلقة  $(Z_7, +, \cdot)$  سبع مثاليات فقط.
- (3) - كل حلقة جزئية من حلقة واحدة تكون حلقة واحدة. خطأ
- (4) - المثالية الصفرية في الحلقة  $(Z_8, +, \cdot)$  هي مثالية أولية.
- (5) - حقل الأعداد الحقيقية  $(R, +, \cdot)$  حلقة أرثينية وليست نيوترية.
- (6) - إن  $(Z_6, +, \cdot)$  حلقة موضعية.
- (7) - إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في أي حلقة.
- (8) - العنصر  $2 + 5Z$  عكوس (قابل للقلب) في حلقة الخارج  $Z/5Z$ .
- (9) - إن الحلقة  $Z$  إيزومورفية مع الحلقة  $nZ$ ، لكل  $n \geq 1$ .
- (10) - كل ساحة مثاليات رئيسية هي حقل.
- (11) - كثيرة الحدود  $x^2 + 4$  أولية (غير قابلة للتحليل) على مجموعة الأعداد العقدية  $C$ .
- (12) - إذا كانت  $R = (Z_{24}, +, \cdot)$ ، فإن  $\text{rad } R$  (جذر  $R$ ) يساوي المثالية الصفرية.

السؤال الثاني (25 درجة): علل صحة ما يلي:

- (1) كل ساحة صحيحة ومنتهية هي حقل.
- (2) إذا كان مميز الحلقة  $R$  يساوي الصفر، فإن  $R$  حلقة غير منتهية.
- (3) كل مثالية يسارية عديمة القوى في حلقة، تكون مثالية عديمة.
- (4) لتكن  $A, B$  مثاليين في الحلقة  $R$ ، عندئذ  $A \cdot B \subseteq A \cap B$ .
- (5) إذا كانت  $R$  حلقة تبديلية وواحدية فإن كل مثالية أعظمية فيها هي مثالية أولية.

السؤال الثالث (9 درجات): إن حلقة كثيرات الحدود  $F[x]$  على أي حقل  $F$ ، هي ساحة مثاليات رئيسية.

السؤال الرابع (10 درجات): لتكن  $R$  حلقة تبديلية وواحدية. برهن أنه إذا كانت  $R$  تحقق شرط الأعظمية (أية مجموعة غير خالية من المثاليات تملك عنصراً أعظمياً) فإن  $R$  تحقق شرط الانتهاء (أية مثالية في  $R$  منتهية التوليد).

مع أطيب التمنيات

د. إيمان الخوجة



أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

- أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:
- (1) إذا كان  $n$  عدداً أولياً فإن عدد مثاليات الحلقة  $(Z_n, +, \cdot)$  يساوي  $n$  مثالية.
  - (2) إن  $(Z_7, +, \cdot)$  حقلاً لكنها ليست حلقة موضعية.
  - (3)  $(8) = (8) + (2)$  في الحلقة  $Z$ .
  - (4)  $Q$  مثالية في  $R$ .
  - (5) كل حقل ساحة مثاليات رئيسية.
  - (6)  $(16) = (12)$  في الحلقة  $(Z_{24}, +, \cdot)$ .
  - (7) الحلقة  $Z$  ايزومورفية مع الحلقة  $nZ$ ، لكل  $n \geq 1$ .
  - (8)  $nZ$  ساحة صحيحة جزئية من  $Z$ ، لكل  $n \geq 1$ .
  - (9) إذا كانت  $R$  حلقة ما و  $f(x), g(x)$  كثيرتي حدود من الحلقة  $R[x]$  من الدرجة 4، 3 على الترتيب، فإن  $f(x)g(x)$  كثيرة حدود من الدرجة 7 دوماً.
  - (10) كثيرة الحدود  $x^2 + 3$  أولية (غير قابلة للتحليل) في  $Z_7$ .
  - (11) إن  $(Z_6, +, \cdot)$  حلقة موضعية.
  - (12)  $\{0, 2, 4\}$  مثالية أولية في الحلقة  $Z_6$ .

السؤال الثاني (20 درجة):

علل صحة العبارات الآتية:

1. أي حقل  $F$  يكون ساحة صحيحة.
2. إذا كان  $p$  أولياً في  $Z$  فإن المثالية الرئيسية  $(p)$  تكون أولية في  $Z$ .
3. لتكن  $R$  حلقة تبديلية و واحد، عندئذ قواسم عنصر غير قابل للتحليل في  $R$  هي فقط العناصر المرافقة له والعناصر العكوسة في  $R$ .
4. إذا كان  $a$  قاسماً للعنصر  $b$  في الحلقة الاقليدية  $R$  و  $\varphi(a) = \varphi(b)$ ، فإن  $a, b$  مترافقان في  $R$ .

السؤال الثالث (24 درجة):

برهن ما يلي:

1. إن حلقة كثيرات الحدود  $F[x]$  على أي حقل  $F$ ، هي ساحة مثاليات رئيسية.
2. إذا كانت  $R$  حلقة تبديلية ونيوثرية (تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة) فإن كل مثالية في  $R$  تكون ذات مولدات منتهية (منتهية التوليد).